Carl Friedrich Gauß

Schimank, Hans

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 2, 1950,
S. 123-140

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Carl Friedrich Gauß

Von **Hans Schimank,** Hamburg

In den Tagen der Agonie, als das Heilige Römische Reich Deutscher Nation durch innern Zwist zu zerfallen und unter dem Ansturm der aus Frankreich andrängenden Revolutionsheere zusammenzubrechen begann, entfaltete sich in eben diesem deutschen Land und Volk eine Blüte des kulturellen Lebens, wie beide sie seit langem nicht erlebt hatten. Es ist keine Übertreibung, wenn man die Jahrzehnte des ausgehenden achtzehnten und des beginnenden neunzehnten Jahrhunderts Zeiten eines deutschen Geistesfrühlings nennt. Damals reihten sich an die großen Repräsentanten einer versinkenden Epoche, an einen Kant, Haydn, Herder und Pestalozzi, die bedeutenden Männer an, die einem neuen Zeitalter das Gepräge geben sollten, die Goethe, Beethoven, Hegel und Humboldt. Ihnen allen ebenbürtig an geistigem Rang und durch Größe der schöpferischen Leistung gesellt sich Carl Friedrich Gauß als der Jüngste zu dieser erlesenen Schar.

Am 30. April 1777 wurde er zu Braunschweig geboren, im gleichen Jahr, in dem auch Heinrich von Kleist und Philipp Otto Runge das Licht der Welt erblickten und in dem der Mathematiker Johann Heinrich Lambert und der Physiker Andreas von Segner die Augen schlossen. Johann Friedrich Karl — so lautet die Eintragung in das Taufregister — war der Sohn eines strebsamen und streng rechtlichen, aber auch harten und starrköpfigen Mannes, des Gassenschlächters, Lehmentierers und Gärtners Gerhard (oder Gebhard) Dietrich Gauß. Er entstammte als einziges Kind einer zweiten Ehe, die sein Vater im Jahre 1776 mit der Steinhauerstochter Dorothea Benze aus Velpke bei Vorsfelde schloß, und brachte seine Kindheit in ärmlichen und beengten Verhältnissen zu. Der Achtjährige, den die Eltern in die Büttnersche Schreib- und Rechenschule bei St. Katharinen schickten, zog schnell die Aufmerksamkeit seiner Lehrer durch eine Rechenbegabung auf sich, von der er daheim schon frühzeitig Proben abgelegt hatte.

Besonders liebevoll nahm sich des Knaben Johann Christian Martin Bartels an, ein jugendlicher Gehilfe des Schulhalters Büttner und nachmals Professor der Mathematik an den Universitäten Kasan und Dorpat. Er führte ihn nicht nur in die Elemente der Mathematik ein, sondern warb ihm auch einflußreiche Gönner, die ihm den Besuch des Katharinengymnasiums ermöglichten. Bartels, der inzwischen sein Studium am Collegium Carolinum, der Keimzelle der heutigen Technischen Hochschule Braunschweig, begonnen hatte, blieb weiterhin um die Förderung des jungen Gauß bemüht und machte vor allem den Hofrat Zimmermann auf seinen Schützling aufmerksam.

1791 wurde Gauß auch dem Herzog Carl Wilhelm Ferdinand von Braunschweig vorgestellt, und „während sich die Umgebung des Herzogs an den Rechenkünsten des bescheidenen, etwas schüchternen vierzehnjährigen Knaben ergötzte", so berichtet 1856 Sartorius von Waltershausen, „verstand der edle Fürst mit feinem Takt ... seine Liebe zu gewinnen und wußte die Mittel zu gewähren, die für die weitere Ausbildung eines so merkwürdigen Talentes erforderlich waren. Gauß verließ mehrfach beschenkt ... die hohe Gesellschaft und bezog vom Herzog unterstützt im Februar 1792 das Collegium Carolinum. Er vervollkommnete sich auf dieser Anstalt noch in den alten Sprachen und erlernte die neuern." Im Oktober 1795 ging der Stipendiat des Herzogs nach Göttingen, wandte sich dort nach anfänglichem Schwanken zwischen dem Studium der klassischen Philologie und dem der Mathematik der letztgenannten Wissenschaft zu und kehrte drei Jahre später wieder nach Braunschweig zurück. Auf Wunsch und unter geldlicher Beihilfe des Herzogs ließ er sich 1799 an der Universität Helmstedt zum Doktor promovieren und machte sich dann an die Vollendung seines ersten großen mathematischen Werkes, der „Disquisitiones arithmeticae".

„Dem Erlauchtesten Fürsten und Herrn Carl Wilhelm Ferdinand, Herzog von Braunschweig und Lüneburg" sind diese Untersuchungen zur Zahlentheorie gewidmet, und was Gauß danach in den Worten der Zueignung ausspricht, ist seine echte, jeglicher Liebedienerei ferne Überzeugung: „Erlauchtester Fürst, in höchstem Maße beglückend ist es mir, Deinen Namen einem Werke voranstellen zu dürfen, das, Dir darzubringen, die heilige Pflicht der Dankbarkeit mich nötigt. Denn wenn Deine Huld, Erlauchtester Fürst, mir den ersten Zugang zu den Wissenschaften nicht eröffnet, Deine stetigen Zuwendungen mir meine Studien nicht bis zum heutigen Tage ermöglicht hätten, würde ich mich der mathematischen Wissenschaft, zu der es mich immer leidenschaftlich hinzog, nicht ausschließlich haben hingeben können. Selbst daß ich diese Forschungen, von denen der vorliegende Band einen Teil wiedergibt, beginnen, mehrere Jahre hindurch fortführen und in Druck geben konnte, verdanke ich lediglich Deiner Güte, die mir gestattete, mich, unbeschwert von Sorgen, vornehmlich dieser Arbeit hinzugeben."

Nach Überwindung mannigfacher Schwierigkeiten erschienen die zu Goslar gedruckten „Disquisitiones" 1801 im Kommissionsverlag von Gerh. Fleischer, Jun. in Leipzig und lösten unter anderem auch ein Versprechen ein, das Gauß fünf Jahre früher in der ersten und wohl auch kürzesten seiner Veröffentlichungen gegeben hatte. Im Zusammenhange mit seinen zahlentheoretischen Studien hatte er bereits während seines ersten Semesters in Göttingen, im Wintersemester 1795 alles gefunden, „was auf die Zerteilung der Wurzeln der Gleichung $\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$ in zwei Gruppen sich bezieht. ... Durch angestrengtes Nachdenken über den Zusammenhang aller Wurzeln untereinander nach arithmetischen Gründen", glückte es ihm dann, wie er in einem Briefe an Christian Ludwig Gerling (vom 6. Januar 1819) berichtet, „bei einem Ferienaufenthalte in Braunschweig am Morgen (des 30. März 1796), ehe ich aus dem Bette aufgestanden war, diesen Zusammenhang auf das klarste anzuschauen, so daß ich die spezielle Anwendung auf das 17-Eck und die numerische Bestätigung auf der Stelle machen konnte." Auf Veranlassung von Zimmermann machte er dann im Intelligenzblatt der allgemeinen (Jenaischen) Litteraturzeitung vom 1. Juni 1796 bekannt, daß außer der seit Euklids Zeiten bekannten Konstruktionen des regelmäßigen Dreiecks, Fünfecks und Fünfzehnecks mittels Zirkel und Lineal „noch eine Menge anderer (regulärer Vielecke), z. B. das Siebzehneck, einer geometrischen Konstruktion fähig ist", und fügte dieser Mitteilung hinzu: „Diese Entdeckung ist eigentlich nur ein Corollarium einer noch nicht ganz vollendeten Theorie von größerem Umfange, und sie soll, sobald diese ihre Vollendung erhalten hat, dem Publikum vorgelegt werden."

In den „Disquisitiones arithmeticae", durch die er die Grundlage für die Entwicklung der neueren Zahlentheorie schuf, löste er dieses Versprechen ein, nachdem er zwei Jahre zuvor in seiner Helmstedter Inauguraldissertation einen neuen Beweis des Satzes geliefert hatte, daß jede ganze rationale algebraische Funktion von nur einer Veränderlichen sich in reelle Faktoren ersten und zweiten Grades zerlegen läßt, die „Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse". Selbst wenn wir zu den Ergebnissen der Disquisitiones den Inhalt dieser Schrift hinzuzählen, in der zum ersten Male in aller Strenge der Fundamentalsatz der Algebra bewiesen wird, daß jeder Gleichung n-ten Grades auch n Wurzeln zukommen, ist damit bei weitem noch nicht der Umfang der Problemstellungen gekennzeichnet, die Gauß damals beschäftigten. Es ist eine — fast möchte man sagen: unvorstellbar — reiche Fülle mathematischer Ideen, die während des Jahrzehnts von 1791—1801 in seinem Geiste hervorquellen. Nicht nur die Anfänge der Zahlentheorie und der höheren Algebra gehören diesem Zeitraum an. Chronologisch geordnet befaßte sich Gauß der Reihe nach mit dem arithmetisch-geometrischen Mittel (1791), mit der Möglichkeit einer nichteuklidischen Geometrie (1792) und mit der Methode der kleinsten Quadrate (1795). Auf etwa dieselbe Zeit (1795/96) geht die Erkenntnis zurück, daß „den komplexen Größen das völlig gleiche Bürgerrecht mit den reellen Größen eingeräumt werden müsse". Der Beweis für das Reziprozitätsgesetz der quadratischen Reste wurde am 8. April 1796 erbracht, und von der Beschäftigung mit den lemniskatischen Funktionen führte ihn, nachdem er am 30. Mai 1799 den Zusammenhang des arithmetisch-geometrischen Mittels mit der Länge der Lemniskate erkannt hat, im folgenden Jahre der Weg binnen weniger Wochen zur vollen Theorie der allgemeinen elliptischen und der Modulfunktionen. Dadurch nahm er — um mit Felix Klein weiterzureden — mit einem Schlage die Entwicklung noch über Abel und Jacobi hinausreichend voraus.

Bezeichnend für Gauß ist, daß von diesen Ergebnissen fast nichts an die Öffentlichkeit gelangte und daß er selbst vertrauten Freunden gegenüber es bei spärlichen Andeutungen bewenden ließ. So sagt er beispielsweise in einem Briefe vom April 1816 an den Astronomen Heinrich Christian Schumacher fast beiläufig, daß er sich mit dem arithmetisch-geometrischen Mittel schon seit 1791 beschäftigt habe, jetzt aber in der Lage wäre, einen „ziemlichen Quartband" über dieses Thema zu schreiben. Geschrieben hat er ihn nicht, und diese Zurückhaltung setzte ihn späterhin unberechtigten Verdächtigungen von seiten Legendres aus. Denn als Carl Gustav Jacob Jacobi 1827 Legendre mitteilte, daß einer Äußerung Schumachers zufolge Gauß bereits im Jahre 1808 über einen Teil der von ihm, Jacobi, veröffentlichten Sätze verfügt habe, schrieb der französische Mathematiker, der ohnehin nicht gut auf Gauß zu sprechen war, entrüstet zurück: „Dies zu behaupten ist fürwahr eine unglaubliche Unverschämtheit von seiten eines

Mannes, der doch genug eigenes Verdienst besitzt, um sich fremde Entdeckungen nicht zueignen zu brauchen." Und einige Monate später fügte er dem (am 14. April 1828) noch hinzu: „Es gibt Leute wie Herrn Gauß, die sich kein Gewissen daraus machen, Sie womöglich der Früchte Ihrer Forschungen zu berauben und zu behaupten, sie hätten sie seit langem besessen. Sicherlich eine absurde Forderung! Denn wenn Herr Gauß auf solche Entdeckungen gestoßen wäre, die in meinen Augen alles übersteigen, was bisher auf dem Gebiete der Analyse geleistet worden ist, würde er sich ganz bestimmt sehr beeilt haben, sie zu veröffentlichen."

Wie Gauß selbst in solchen Fragen dachte, geht aus einem fast gleichzeitigen Schreiben (vom 30. März 1828) an Friedrich Wilhelm Bessel hervor, in dem es bezüglich der von Niels Henrik Abel noch etwas vor Jacobi bekanntgemachten Untersuchungsergebnisse heißt: „Zur Ausarbeitung der seit vielen Jahren angestellten Untersuchungen über die transzendenten Funktionen werde ich vorerst wohl noch nicht kommen können, da erst noch mit manchen andern Dingen aufgeräumt werden muß. Herr Abel ist mir, wie ich sehe, zuvorgekommen und überhebt mich in Beziehung auf etwa ein Drittel dieser Sachen der Mühe, zumal da er alle Entwicklungen mit Eleganz und Konzision gemacht hat. Er hat gerade denselben Weg genommen, welchen ich 1798 einschlug, daher die große Übereinstimmung der Resultate nicht zu verwundern ist ... Jeder Mißdeutung zuvorzukommen, bemerke ich jedoch, daß ich mich nicht erinnere, von diesen Sachen irgend jemand etwas mitgeteilt zu haben."

Die Begründung für dieses, Legendre so ganz unverständlich erscheinende Verhalten hat Gauß selbst uns in manchen seiner Briefe gegeben, von denen einer der ältesten, der an Schumacher vom 17. September 1808, unmittelbar auf die elliptischen Funktionen Bezug hat. „Mir ist bei der Integralrechnung", so heißt es dort, „immer das weit weniger interessant gewesen, wo es nur auf Substitutieren, Transformieren etc., kurz auf einen gewissen geschickt zu handhabenden Mechanismus ankommt, um Integrale auf algebraische oder logarithmische oder Kreisfunktionen zu reduzieren, als die genauere tiefere Betrachtung solcher transzendenten Funktionen, die sich auf jene nicht zurückführen lassen. Mit Kreisfunktionen und logarithmischen wissen wir jetzt umzugehen wie mit dem Einmaleins, aber die herrliche Goldgrube, die das Innere der höheren Funktionen enthält, ist noch fast ganz terra incognita ... Man gerät in Erstaunen über den überschwenglichen Reichtum an neuen höchst interessanten Wahrheiten und Relationen, die dergleichen Funktionen darbieten, wohin u.a. auch diejenigen gehören, mit denen die Rektifikation der Ellipse und Hyperbel zusammenhängt." Bezüglich seiner Schaffensweise aber sagt er (in Briefen an den gleichen Empfänger vom 2. April 1833 bzw. 20. Juni 1836): „Sie wissen, daß ich langsam schreibe, allein das kommt hauptsächlich daher, weil ich mir nie anders gefallen kann, als wenn in kleinem Raum möglichst viel ist, und kurz zu schreiben viel mehr Zeit kostet als lang." Und noch eindringlicher in dem anderen Briefe: „Die allgemeinen Aperçus, die in 999 Fällen gut gehen, können das 1000te mal am Ende in einen cul de sac führen ... Bemerken Sie zugleich, daß ich nicht ohne Ursach pauca sed matura (Weniges, aber Ausgereiftes) zu meinem Wahlspruch für alles zu Veröffentlichende gemacht habe. Die allgemeinen Aperçus sind die

Geburten einer Stunde, aber um daraus etwas Gereiftes zu machen, ist oft lange, oft jahrelange große Detailarbeit nötig, von der man voraussieht, daß man sie gewiß durchführen kann, wenn man sich dazu gibt, obwohl auch dann immer noch manche ähnliche Geburten zweiten und dritten Ranges, die schon auf Ordre kommen müssen, nötig sind. Procreare iucundum, at parturire molestum." (Zeugen ist lustvoll, aber Gebären beschwerlich.)

In manchen Fällen hielt ihn auch die Furcht vor dem „Geschrei der Böoter" von der Bekanntgabe seiner Untersuchungsergebnisse zurück, wie es beispielsweise hinsichtlich der Grundlagen der nichteuklidischen Geometrie der Fall war. Bereits 1792 hatte er, wie es in einem Briefe an Schumacher (vom 28. November 1846) heißt, über eine Geometrie nachgedacht, „die stattfinden müßte und strenge konsequent stattfinden würde, wenn die euklidische Geometrie nicht die wahre ist." Den Satz, daß in jeder, da sParallelenaxiom nicht enthaltenden Geometrie der Flächeninhalt eines Vielecks der Abweichung der Summe der Außenwinkel von 360° proportional ist, hatte er zwei Jahre später als „ersten, gleichsam an der Schwelle der Theorie liegenden Satz" erkannt (Brief an Gerling vom 2. Oktober 1846). Zu Olbers aber äußerte er sich (am 28. April 1817): „Ich komme immer mehr zu der Überzeugung, daß die Notwendigkeit unserer (euklidischen) Geometrie nicht bewiesen werden kann, wenigstens nicht vom menschlichen Verstande noch für den menschlichen Verstand. Vielleicht kommen wir in einem anderen Leben zu andern Einsichten in das Wesen des Raumes ... Bis dahin müßte man die Geometrie nicht mit der Arithmetik, die rein a priori steht, sondern etwa mit der Mechanik in gleichen Rang setzen."

Schon im vorangehenden Jahre (Brief an Gerling vom 11. April 1816) war es ihm als wünschenswert erschienen, „daß die Geometrie Euklids nicht wahr wäre, weil wir dann ein allgemeines Maß a priori hätten" und als Gerling ihm im Januar 1819 eine kurze Darlegung des Marburger Juristen Ferdinand Karl Schweikart über die Grundzüge einer nichteuklidischen „Astral"-geometrie zusandte, konnte er seinen zustimmenden Äußerungen dazu sogleich hinzufügen: „Ich bemerke nur noch, daß ich die Astralgeometrie soweit ausgebildet habe, daß ich alle Aufgaben vollständig auflösen kann, sobald die Konstante = C gegeben wird. Der Defekt der Winkelsumme im ebenen Dreieck gegen 180° ist z.B. nicht bloß desto größer, je größer der Flächeninhalt ist, sondern ihm genau proportional, so daß der Flächeninhalt eine Grenze hat, die er nie erreichen kann, und welche Grenze selbst dem Inhalt der zwischen drei sich asymptotisch berührenden geraden Linien enthaltenen Fläche gleich ist".

Mit besonderer Genugtuung erfüllte es ihn, als er 1832 aus Ungarn eine kleine Schrift über die nichteuklidische Geometrie zugesandt erhielt, worin er alle seine eigenen Ideen und Resultate wiederfand, „mit großer Eleganz entwickelt, obwohl in einer für jemand, dem die Sache fremd ist, wegen der Konzentrierung etwas schwer zu folgenden Form. Der Verfasser ist ein sehr junger österreichischer Offizier, Sohn eines Jugendfreundes von mir, mit dem ich mich 1798 oft über die Sache unterhalten habe, wiewohl damals meine Ideen noch viel weiter von der Ausbildung und Reife entfernt waren, die sie durch das eigne Nachdenken dieses jungen Mannes erhalten haben. Ich halte diesen jungen Geometer (Johann) von Bolyai für ein Genie erster Größe."

Die Worte rückhaltloser Anerkennung, mit denen sich Gauß über die „scientia spatii abolute vera" des Sohnes seines Göttinger Studienfreundes Wolfgang von Bolyai ausspricht, waren sicherlich nicht durch die Erinnerung an die langjährige Verbundenheit mit dem Vater des Verfassers beeinflußt. Sein Beifall galt hier wie stets ausschließlich der Leistung als solcher; wie unter anderem daraus hervorgeht, daß er mit ähnlicher Befriedigung von den Arbeiten eines Schweikart und Taurinus Kenntnis nahm und sich ebenso zustimmend und befriedigt über die Abhandlungen zur imaginären Geometrie äußerte, die ungefähr um dieselbe Zeit Nocolai Ivanowitsch Lobatschefsky in russischen Journalen hatte erscheinen lassen. Neid auf fremde Leistung lag Gauß fern. Nicht nur der vom Vater ererbte Sinn für strengste Rechtlichkeit hinderte ihn daran. Er war sich auch des wahrhaft unerschöpflichen Reichtums der eigenen Ideen so sicher bewußt, daß er in wahrhaft fürstlicher Großzügigkeit über sie verfügen und verschwenderisch mit ihnen umgehen konnte.

Eine Bemerkung, die bereits H. E. Timerding (in einem Aufsatz über „Kant und Gauß" in den Kantstudien) gemacht hat, ist aber hier zu wiederholen. Ganz ausnahmsweise hat Gauß bei den nichteuklidischen Geometrien einen der möglichen Fälle außer acht gelassen, denjenigen, in welchem die Winkelsumme des Dreiecks mehr als 180° beträgt. Er beschränkte durch die von ihm — bewußt oder unbewußt — vorgenommene einseitige Vorzeichenwahl für die Raumkrümmung seine Betrachtungen auf diejenigen Arten von Räumen, die in sich zurücklaufend und von endlicher Größe sind, behandelte also — um mit Timerding fortzufahren — gerade denjenigen Fall, der das Denken am meisten befriedigt und eine besonders wichtige Rolle in den heutigen kosmologischen Betrachtungen spielt.

Ergänzend ist bei dieser Gelegenheit zu erwähnen, daß Gauß sich auch mit der Frage der mehr als zwei- oder dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten beschäftigt hat. An eigenen Äußerungen liegt von ihm darüber nicht viel mehr als die Stelle in einem Briefe an Gerling (vom 8. April 1844) vor, wo es heißt: „Ihre Bemerkungen über Symmetrie und Kongruenz sind vollkommen treffend. Was noch zu desiderieren wäre, ist der metaphysische Grund warum es so ist . . . und damit auch die Erweiterung auf eine Geometrie von mehr als 3 Dimensionen, wofür wir menschlichen Wesen keine Anschauung haben, die aber in abstracto betrachtet nicht widersprechend ist und füglich höheren Wesen zukommen könnte." Deutlichere Hinweise finden sich in einer Inauguraldissertation „Über das Prinzip des kleinsten Zwanges", mit der August Ritter, später Professor der Ingenieurmathematik an den Technischen Hochschulen Hannover und Aachen, 1853 in Göttingen promovierte. Sie werden ergänzt und bestätigt durch die Wiedergabe von Darlegungen aus einem Kolleg über die Methode der kleinsten Quadrate, das Ritter im Wintersemester 1850/51 bei Gauß hörte, nachschrieb und ausarbeitete.

Bisher war vorwiegend von Problemstellungen und Ergebnissen die Rede, zu denen Gauß, seiner Zeit geistig weit vorauseilend, gelangte, ohne davon etwas öffentlich bekannt zu machen. Es ist notwendig, daß wir uns jetzt der Betrachtung solcher Arbeiten zuwenden, durch die er unmittelbar auf seine Zeitgenossen einwirkte und denen er letztlich seinen Ruhm und den Ruf verdankte, ein princeps mathematicorum, ein Fürst im Reiche der mathematischen Wissenschaften, zu sein. Im Gegensatz zum Inhalt seiner beiden ersten Veröffentlichungen, der Helmstedter Dissertation und der Disquisitiones arithmeticae, schließt die Mehrzahl von ihnen an die Behandlung praktisch wichtiger Fragen an, und rein schematisch könnte man seine wichtigsten wissenschaftlichen Veröffentlichungen vom Jahre 1801 ab geradezu nach den Grundeinheiten des technischen Maßsystems einteilen: Zeit, Länge und Kraft. Denn während der beiden ersten Jahrzehnte des 19. Jahrhunderts beschäftigen ihn vorwiegend astronomische Arbeiten, zwischen 1820 und 1830 geodätische und von da ab physikalische.

Es ist ein immer wieder hervortretender, ja geradezu kennzeichnender Zug des Gaußischen Geistes, daß die Begegnung mit der Wirklichkeit kein Hemmnis für seinen Gedankenflug bildete, sondern sich ihm eher als eine Art von Startbahn darbot, von der aus er den Abflug in mannigfach variierender Richtung unternahm. Wie der Steinblock durchsichtig wird vor dem Auge des schaffenden Künstlers und ihn im Innern der ungefügen Masse die plastische Gestalt des Bildwerks wahrnehmen läßt, so schälte sich vor den Blicken von Gauß allemal aus dem Wust der konkreten Anforderungen die Formenschönheit eines den Einzelfall weit hinter sich zurücklassenden allgemeinen mathematischen Zusammenhanges heraus. Schon ein kleiner Aufsatz: „Berechnung des Osterfestes", der im August 1800 in Zachs „Monatlicher Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde" erschien, beweist dies.

Der Zweck dieser Mitteilung sollte Gauß' eigenen Worten zufolge nicht sein, „das gewöhnliche Verfahren zur Bestimmung des Osterfestes zu erörtern, das man in jeder Anweisung zur mathematischen Chronologie findet, . . . sondern von dieser Aufgabe eine . . . bloß auf den einfachsten Rechenoperationen beruhende, rein analytische Auflösung zu geben", und deshalb fügte er seiner Anleitung zur Benutzung der Osterformel auch keinerlei sie begründende Beweisführung hinzu. Veranlaßt wurde ihre Aufstellung wahrscheinlich durch den Umstand, daß Dorothea Gauß sich des Geburtsdatums ihres Sohnes nicht zu erinnern vermochte und nur wußte, daß es der Mittwoch vor Rogate des Jahres 1777 gewesen war. Den 30. April als das fragliche Datum anzugeben, war für Gauß naturgemäß eine Kleinigkeit. Aber fast im gleichen Augenblick, in dem er sich an diese einfache Aufgabe machte, verwandelte sie sich ihm zu einer zahlentheoretischen Fragestellung, deren „elegante" Beantwortung ihm am 16. Mai 1800 gelang. Knapp ein Jahr später stellte er (am 1. April 1801) eine entsprechende Formel auch für die Berechnung des Datums des jüdischen Passahfestes auf.

Fast zur selben Zeit bot sich ihm ein weitaus wichtigeres Problem auf astronomischem Gebiete dar. Am 1. Januar 1801 hatte Guiseppe Piazzi auf der Sternwarte zu Palermo einen Stern 8. Größe im Sternbilde des Stieres wahrgenommen, der ebensowohl ein kleiner schweifloser Komet wie ein neues Mitglied unseres Planetensystems sein konnte. Schon nach kurzer Zeit war das Gestirn den Blicken der Astronomen in den Strahlen der Abenddämmerung entschwunden, und alle Bemühungen, die Ceres Ferdinandae im Spätsommer des Jahres am Morgenhimmel wieder aufzufinden, waren vergeblich geblieben.

Die Aufgabe, eine Planetenbahn zu berechnen, von der nur ein sehr kurzes Stück durch Beobachtungen festgelegt war, reizte Gauß. Er löste sie im Herbst des Jahres 1801, indem er nach einem neuen Verfahren zunächst eine angenäherte Bahn berechnete und diese dann in solcher Weise verbesserte, daß sie sich möglichst vollkommen den beobachteten Werten anschloß. Sein Verfahren der kleinsten Summe der Fehlerquadrate leistete ihm dabei gute Dienste, und schon im November konnte er an den Freiherrn von Zach eine Ephemeride übersenden, die dieser im Dezemberheft der „Monatlichen Correspondenz" veröffentlichte. Mit ihrer Hilfe wurde die Ceres beinahe gleichzeitig durch Franz Xaver von Zach auf der Sternwarte Seeberg bei Gotha und von Wilhelm Olbers in Bremen wiederentdeckt. „Nur Ihnen, mein verehrungswürdiger Freund", so schrieb Olbers im ersten seiner Briefe an Gauß (vom 22. Januar 1802), „verdanken wir ... die Wiederauffindung dieses neuen Planeten. Ich wenigstens ... würde die Ceres schwerlich so weit ostwärts gesucht haben, wenn nicht Ihre elliptischen Elemente berechnet worden wären. ... Der Erfolg macht Ihren Rechnungen und den Piazzischen Beobachtungen gleichviel Ehre und hat uns nun die Ceres wiedergebracht, die wir nach den Kreis-Elementen nie würden haben wiederfinden können."

Was Gauß vollbracht hatte, war in der Tat eine staunenswerte mathematische Leistung. Sie machte mit einem Schlage seinen Namen in weitesten Kreisen bekannt und bewirkte, daß aus Rußland das Angebot an ihn gelangte, die Leitung der Sternwarte an der Petersburger Akademie der Wissenschaften zu übernehmen. Gauß lehnte ab, nicht zum wenigsten aus Dankbarkeit gegenüber seinem Fürsten, der alles in seinen Kräften Stehende tat, um den erfolgreichen Gelehrten in Braunschweig zu halten. „Was will der Gauß sich unterm 60. Grad der Breite die Augen verderben, da ich ihm alles, was er dort haben könnte, Muße und eine bequeme Lage, hier auch geben kann?" sagte er zu Zimmermann und ließ es nicht nur bei Worten bewenden. Er gewährte Gauß die Möglichkeit, seine theoretisch-astronomischen Untersuchungen fortzusetzen, das neue Verfahren der Bahnberechnung an den bald darauf entdeckten anderen Planetoiden, der Pallas, Juno und Vesta, neuerlich zu erproben und weiterzubilden und insbesondere am Beispiel der Pallasbahn die Grundlagen der Störungsrechnung zu entwickeln.

Eine zusammenfassende Darstellung der von ihm benutzten Methoden, einschließlich der der kleinsten Fehlerquadrate, veröffentlichte Gauß in seinem astronomischen Hauptwerk, der „Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium". Die ursprünglich auf Deutsch niedergeschriebene „Theorie der Bewegung der Himmelskörper, die sich längs eines Kegelschnittes um die Sonne bewegen", wurde auf Wunsch des Verlegers Perthes ins Lateinische übertragen und erschien 1809 zu Hamburg. Sie lehrte sowohl „aus drei vollständigen Beobachtungen die Bahn zu bestimmen, wenn man von dieser noch gar nichts weiß" ,wie eine noch ganz unbestimmte Bahn „aus vier Beobachtungen (zu berechnen), wovon aber nur zwei vollständig sind". Schließlich wurde darin noch gezeigt, wie „aus einer größeren Anzahl von Beobachtungsdaten als unbekannte Größen, von denen sie abhängen, die wahrscheinlichsten Werte der letzteren zu bestimmen" und Störungsrechnungen durchzuführen sind.

In den äußeren Lebensumständen von Gauß hatte inzwischen eine einschneidende Veränderung stattgefunden. Der Tod Herzog Karl Wilhelm Ferdinands, der seiner schweren, in der Schlacht von Auerstädt empfangenen Verwundung erlegen war, hatte das Band der Verpflichtung gelöst, durch das Gauß an seinen Landesherrn und damit an Braunschweig gefesselt wurde. Jetzt zögerte er nicht länger und brachte Verhandlungen zum Abschluß, die zwischen ihm und der Universität Göttingen schon eine Reihe von Jahren hin und her gegangen waren. Im November 1807 folgte er der Berufung als Direktor der neu zu erbauenden Sternwarte und siedelte mit Frau und Kind — er hatte sich am 9. Oktober 1805 mit Johanna Osthoff vermählt — nach Göttingen über.

Der Anfang dieses neuen, mit soviel frohen Hoffnungen begonnenen Lebensabschnittes war alles andere als vielversprechend. Durch eine von der französischen Besatzungsmacht der Stadt Göttingen auferlegte Zwangsanleihe geriet Gauß fast unmittelbar nach seiner Ankunft in arge wirtschaftliche Bedrängnis. Die Hilfsbereitschaft von Olbers, Laplace und einem Unbekannten — es war der Fürstprimas Karl von Dalberg — befreiten ihn aus seiner Verlegenheit. Schwereres Unglück suchte ihn im Herbst des folgenden Jahres heim. „Lieber Olbers!", so mußte er am 12. Oktober 1809 nach Bremen schreiben, „Sie luden mich so freundlich ein, Sie zu besuchen, wenn meine Frau sich wohl befände. Jetzt befindet sie sich wohl. Gestern abend um acht Uhr habe ich ihr die Engelsaugen, in denen ich seit fünf Jahren einen Himmel fand, zugedrückt. . . . Erlauben Sie mir, . . . ein paar Wochen in den Armen der Freundschaft Kräfte für das Leben zu sammeln, das jetzt nur noch als meinen drei unmündigen Kindern gehörend Wert hat." Wenige Monate später entriß ihm der Tod auch noch das jüngste dieser Kinder. In Vergessen bringendem, rastlosem Schaffen und in dem Frieden einer zweiten Ehe, die er am 4. August 1810 mit Minna Waldeck, der vertrauten Freundin seiner ersten Frau, einging, suchte und fand er Linderung für seinen Schmerz und überwand die trübe Stimmung, die ihn damals mitten zwischen wissenschaftliche Aufzeichnungen die Worte hatte schreiben lassen: „Der Tod ist mir lieber als ein solches Leben."

Neben praktischer Beobachtungstätigkeit und der Fürsorge für die Ausstattung der neuen Sternwarte mit guten instrumentellen Hilfsmitteln nahm auch die Verpflichtung zur Abhaltung von Vorlesungen Gauß in Anspruch. Es war eine Art der Beschäftigung, die ihm recht zuwider war und über die er sich auch später noch (am 19. Februar 1828) Olbers gegenüber mit den Worten beklagte: „Ich bin fest davon überzeugt, daß in einer anderen äußeren Lage alles besser gehen würde; *Unabhängigkeit*, das ist das große Losungswort für die Geistesarbeiten in die Tiefe. Aber wenn ich meinen Kopf voll von in der Luft schwebenden geistigen Bildern habe, die Stunde heranrückt, wo ich Kollegien lesen muß, so kann ich Ihnen nicht beschreiben, wie angreifend das Abspringen, das Anfrischen heterogener Ideen für mich ist, und wie schwer mir oft Dinge werden, die ich unter anderen Umständen für eine erbärmliche ABC-Arbeit halten würde." Trotz solcher Klagen lehnte er 1810 eine Berufung nach Berlin ab, obwohl Wilhelm von Humboldt ihm angeboten hatte, dort „vorzüglich nur bei der Königlichen Akademie der Wissenschaften . . . tätig zu sein . . . (und lediglich) von Zeit zu Zeit eine Vorlesung zu halten", soviel seine Muße und Gesundheit dies zulasse. Ebenso scheiterte ein zweiter,

9*

während der Jahre 1821 und 1825 unternommener Versuch, ihn nach Berlin zu ziehen. Übrigens hinderte seine Abneigung gegen das Kollegienlesen Gauß keineswegs, sich der Ausbildung seiner Schüler sehr gewissenhaft zu widmen, und für die Zeit von 1809 bis 1814 kann man geradezu von der Bildung einer Gaußschen Astronomenschule sprechen: Schumacher, Bessel, Gerling, Encke und Möbius, Männer, mit denen ihn später aufrichtige Freundschaft verband, saßen damals als Hörer zu seinen Füßen.

Das Jahrzehnt von 1810 bis 1820 war aber auch reich an andersartigen Ergebnissen, von denen das wissenschaftliche Tagebuch, das Gauß seit 1796 führte, einige besonders wichtige aufzählt. „Das vorstehende, infolge widriger Schicksale wiederum unterbrochene Verzeichnis nehmen wir wieder auf", so lautet die Eintragung vom 29. Februar 1812, die dann fortfährt: „Im Monat November 1811 gelang es, den rein analytischen Beweis des Fundamentalsatzes der Lehre von den Gleichungen zu vervollständigen. Da aber nichts schriftlich fixiert worden war, entschwand ein bestimmter wesentlicher Teil völlig der Erinnerung. Diesen während eines recht langen Zeitraums vergeblich gesuchten Teil haben wir nunmehr glücklich wiedergefunden." Es handelt sich um den zweiten Beweis für die Existenz der Wurzeln algebraischer Gleichungen, den er der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften am 7. Dezember 1815 mitteilte, während ein dritter, gleichfalls rein analytisch durchgeführter Beweis als „Demonstratio tertia" wenige Wochen später vorgelegt wurde.

Die beiden folgenden Aufzeichnungen des Tagebuchs, datiert vom 26. September und 15. Oktober 1812, vermerken: „Wir haben eine völlig neue Theorie der Anziehung eines elliptischen Sphäroids auf außerhalb des Körpers gelegene Punkte gefunden"; und „auch die übrigen Teile ebendieser Theorie haben wir mittels eines neuen Verfahrens von erstaunlicher Einfachheit erledigt". Sie beziehen sich auf Untersuchungen über die Anziehung homogener Ellipsoide, die 1813 veröffentlicht wurden. Tafeln zur Berechnung der Logarithmen von Summen und Differenzen, wenn die Logarithmen von deren Gliedern bekannt sind, gab Gauß 1812 heraus, im selben Jahre, in dem auch die „Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots$$

pars prior" (Allgemeine Untersuchungen über die unendliche Reihe $1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}\cdot x+\cdots$ erster Teil) erschienen. Sie enthalten unter anderem „das erste Beispiel einer exakten Konvergenzuntersuchung im modernen Sinne" (Pringsheim, Encykl. d. math. Wiss. Bd. I, 1, S. 79) und sind insofern von Bedeutung, als zahlreiche bekannte Reihen als Sonderfälle in der Gaußschen Reihe enthalten sind.

Unter dem Datum des 23. Oktober 1813 verzeichnet das Tagebuch: „Die Grundlage einer allgemeinen Theorie der biquadratischen Reste, nach der wir beinahe sieben Jahre lang mit größtem Eifer, aber stets vergeblich suchten, haben wir nunmehr glücklich am selben Tage gefunden, an dem uns (ein zweiter) Sohn (aus der Ehe mit Minna Waldeck) geboren wurde. Es ist das ausgesucht Beste von allem, was wir je geleistet haben. Demgegenüber lohnt es kaum der Mühe, gewisse Vereinfachungen für die Berechnung parabolischer Bahnen zu erwähnen." Felix Klein ist der Ansicht, daß es sich bei dieser Bemerkung um die wahre Theorie der biquadratischen Reste und die Einführung der komplexen Zahlen in die Zahlentheorie handelt. In Übereinstimmung mit seiner Auffassung bezieht sich die letzte Eintragung in das Tagebuch vom 9. Juli 1814 auf die Anzahl Lösungen der Kongruenz (mod $a+bi$) und spricht von einer höchst eleganten Verknüpfung der Theorie der biquadratischen Reste mit den lemniskatischen Funktionen.

Ebenfalls aus dem Jahre 1814 stammt die Gaußsche Methode, durch zweckmäßige Wahl der Abszissen die Quadratur einer Kurve möglichst genau vorzunehmen. Sie ist in der „Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi" enthalten (im „Neuen Verfahren, die Werte von Integralen durch Näherung zu finden"). Schließlich müssen wir in diesem Zusammenhang noch an eine Abhandlung über die Berechnung der Säkularstörungen erinnern, die „Determinatio attractionis, quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta, si eius massa per totam orbitam ratione temporis, quo singulae partes describuntur, uniformiter esset dispartita" (die Bestimmung der Anziehung, die auf einen seiner Lage nach gegebenen Punkt ein Planet ausüben würde, wenn seine Masse längs der ganzen Bahn proportional der Zeit, in der die einzelnen Stücke durchlaufen werden, gleichmäßig verteilt wäre).

Die Arbeit erschien im Jahre 1818, als Gauß sich bereits mit geodätischen Aufgaben zu beschäftigen begann. Zwei Jahre früher war nämlich Schumacher von der Dänischen Regierung beauftragt worden, eine Gradmessung zwischen Skagen und Lauenburg durchzuführen. Schumacher hielt es für wünschenswert, diese Meridianmessung durch Hannover hindurch südlich fortzusetzen und hatte Gauß aufgefordert, sich mit Rat und Tat an dem großen Unternehmen zu beteiligen. Gauß war dazu bereit und erbot sich sogar, die Berechnung der Hauptdreiecke persönlich zu übernehmen. Zumindest zur Durchführung der Vermessungsarbeiten selber bedurfte es jedoch nicht unerheblicher Mittel, die für die hannoverschen Lande auch nur von der hannoverschen Regierung bewilligt werden konnten. Ihre Zustimmung war erforderlich, wenn aus dem ganzen Plane etwas werden sollte.

Schumachers diplomatischem Geschick gelang es, sie zu erhalten. Die beiden Freunde verabredeten nun zunächst die Durchführung einer Basismessung in der Gegend von Hamburg. Erste Messungen der Winkel zwischen Hamburg und Hohenhorn einerseits, Hohenhorn und Lauenburg andererseits nahm Gauß bereits im September 1818 vom Michaelisturm in Lüneburg aus vor. Bei dieser Gelegenheit brachte ihn das Aufblitzen eines Fensters des Michaeliskirchturms in Hamburg, das das Sonnenlicht nach Lüneburg herüberspiegelte, auf den Gedanken zur Benutzung eines Sonnenspiegels für Signal- und Vermessungszwecke. Ein solches Heliotrop ließ er sich zwei Jahre später bauen, und es leistete ihm in der Folgezeit gute Dienste bei den Vermessungsarbeiten, die sich unter mannigfachen Mühsalen und Schwierigkeiten noch viele Jahre hinzogen. Bis zum Jahre 1825 nahm Gauß selbst daran teil, danach überließ er sie seinen Mitarbeitern. Im Rahmen dieser Unternehmungen erfolgte auch die Ausmessung des besonders großen Dreiecks zwischen dem Brocken, dem Inselsberg bei Gotha und dem Hohen Hagen bei Göttingen. Die geringfügige Abweichung der Winkelsumme von 180°, die sich dabei ergab, blieb innerhalb der Grenzen möglicher Meßfehler und lieferte somit keinen Hinweis auf eine etwaige nichteuklidische Struktur unseres Raumes

Bei der Auswertung der Tausende von Zahlen aus allen diesen Messungen hatte Gauß wieder einmal Gelegenheit, seine erstaunliche Rechenfertigkeit zu beweisen. Erstaunlicher sind die Früchte, die eine scheinbar aufs rein Praktische gerichtete Tätigkeit bei ihm auch in wissenschaftlicher Hinsicht zeitigte. Als erste Ergebnisse sind hier die drei Abhandlungen über die Methode der kleinsten Quadrate zu nennen, die als Erster und Zweiter Teil, sowie als Supplement der Theorie einer mit kleinsten Fehlern behafteten Kombination von Beobachtungen, als „Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars Prior (1821), pars posterior (1823) und als Supplementum theoriae (1826) herauskamen und diesem von Legendre und Gauß geschaffenen Rechnungsverfahren Eingang in die Ausgleichsrechnungen des Vermessungswesens verschafften.

Die „Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona" (1828), gleichsam der Schlußstein der praktischen Vermessungsarbeiten von Gauß, wurde für die Geodäsie auch insofern von Bedeutung, als in dieser Abhandlung unter anderem die erste moderne Definition der Erdgestalt enthalten ist, des Geoids, wenn wir uns des von Listing und Heinrich Bruns später geprägten Ausdrucks bedienen. „Was wir im geometrischen Sinn Oberfläche der Erde nennen, ist nichts anderes als diejenige Fläche, welche überall die Richtung der Schwere senkrecht schneidet und von der die Oberfläche des Weltmeers einen Teil ausmacht. Die Richtung der Schwere an jedem Punkte wird aber durch die Gestalt des festen Teils der Erde und seine ungleiche Dichtigkeit bestimmt. ... Die geometrische Oberfläche ist das Produkt der Gesamtwirkung dieser ungleich verteilten Elemente, ... (trotz) dieser Sachlage hindert aber noch nichts, die Erde im ganzen als elliptisches Rotationssphäroid zu betrachten, von dem die wirkliche — geometrische — Oberfläche bald in stärkern, bald in schwächern, bald in kürzern, bald in längern Undulationen abweicht."

Geodäsie und Kartographie erfuhren eine Bereicherung durch Untersuchungen über die konforme Abbildung von Flächen, die 1823 der Kopenhagener Gesellschaft der Wissenschaften als Preisschrift eingereicht wurden und dem Titel entsprechend die „Allgemeine Auflösung der Aufgabe (enthielten), die Teile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird". Diese Darstellung ist, wie es in einem Briefe (vom 11. Dezember 1825) an den Astronomen Peter Andreas Hansen heißt, die wesentliche Bedingung bei allen Kartenprojektionen und es wäre zweckmäßig, ihr einen eigenen Namen zu geben. Den Ausdruck „konform" schlug Gauß dafür 1843 vor. Allgemein betrachtet handelte es sich für ihn bei diesen Fragen jedoch um ein weit größeres Problem als das der Kartenprojektion, nämlich um die Untersuchung des „Generalbegriffs von Darstellung einer Fläche auf einer anderen, die in der Tat gar nichts weiter enthält, als daß jedem Punkt der einen nach irgendeinem stetigen Gesetz ein Punkt der andern korrespondieren soll".

Die Ergebnisse seines Nachdenkens darüber sind in den „Disquisitiones generales circa superficies curvas" (allgemeine Untersuchungen über krumme Flächen) vom Jahre 1828 enthalten. Sie fassen die Fläche nicht mehr als Grenze eines Körpers auf, sondern als ein biegsames, aber nicht dehnbares zweidimensionales Gebilde. Unter diesem Gesichtspunkte wird das Krümmungsmaß für einen beliebigen Flächenpunkt definiert und die Erklärung des Begriffs der „kürzesten", geodätischen, Linien auf einer beliebig gekrümmten Fläche gegeben, die nichts anderes sind als Kurven von der Seitenkrümmung Null. Darüber hinaus enthält die Arbeit den Satz von der Konstanz des Krümmungsmaßes bei beliebiger dehnungsfreier Biegung der Fläche und weist ferner nach, „was zur Berechnung des Exzesses der Summe der drei Winkel über 180° in einem Dreiecke auf einer nichtsphärischen Fläche, wo die Seiten kürzeste Linien sind, erforderlich ist, (und) wie in diesem Fall der Exzess auf die drei Winkel ungleich verteilt werden muß, damit die Sinus den Seiten gegenüber proportional werden" (Brief an Olbers vom 1. März 1827). Man sieht, wie von diesen für die Entwicklung der Differentialgeometrie grundlegenden und in ihrem Kern bis auf das Jahr 1816 zurückreichenden Betrachtungen der weitere Weg zu den schon erwähnten Spekulationen über die nichteuklidische Geometrie hinüberleitet. Weitere Ausführungen des Themas brachten fast zwei Jahrzehnte später die „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie" (1844 bzw. 1847), denen Gauß sich zuwandte, als durch den Fortgang Wilhelm Webers die gemeinsam mit ihm durchgeführten physikalischen Arbeiten ihr Ende fanden.

Die Bekanntschaft dieses seines langjährigen Mitarbeiters und um 27 Jahre jüngeren Freundes hatte er 1828 auf dem „wissenschaftlichen Jahrmarkt" der in Berlin tagenden Naturforscherversammlung gemacht, an der er auf Einladung Alexander von Humboldts teilnahm. Er hatte an dem noch recht jünglinghaft aussehenden Hallenser Extraordinarius Gefallen gefunden und sorgte für seine Berufung auf den Göttinger Lehrstuhl der Physik. Im September 1831 traf Weber in Göttingen ein und fand Gauß in recht niedergedrückter Stimmung, gelähmt in seiner Schaffensfreude durch die Sorge um seinen nach Amerika ausgewanderten Sohn Eugen und durch den Schmerz über den Verlust seiner zweiten Gattin.

Aber wie einstmals dem Dreißiger ward jetzt auch wieder dem Vierundfünfzigjährigen wissenschaftliche Arbeit zur großen Panacee. In Gemeinschaft mit „Freund" Weber, den er „ebenso liebenswürdig von Charakter als talentreich" fand, und der ihm „das Leben in Göttingen durch sein Hiersein viel lieber" machte (Brief an Johann Franz Encke vom 12. Mai 1832), wandte er sich einem neuen, bisher von ihm noch nicht betretenen Forschungsgebiete zu. Er beteiligte sich an den Bestrebungen des Vereins zum Zwecke erdmagnetischer Beobachtungen, den Alexander von Humboldt ins Leben gerufen hatte, und gab dieser Einrichtung eigentlich erst die zweckentsprechende Gestalt. Die Methodik der Beobachtungen mußte überprüft, erforderlichenfalles verbessert und unter den Mitgliedern des Vereins vereinbart werden. Neue Geräte, mittels deren sich die Elemente des Erdmagnetismus und ihre zeitlichen oder örtlichen Schwankungen eindeutig und genauer als bisher bestimmen ließen, mußten ersonnen und ausgeführt, die in Göttingen und anderwärts gewonnenen Beobachtungszahlen ausgewertet und zusammengestellt werden. Gauß hatte neben seinem mathematisch-physikalischen jetzt auch sein organisatorisches Genie zu beweisen. In Gemeinschaft mit Weber gelang es ihm, allen diesen Anforderungen gerecht zu werden. Er legte die Arbeiten über Kristallographie, mit denen er sich Anfang 1831 beschäftigt hatte, beiseite und wandte sich ganz und gar den erdmagnetischen Untersuchungen zu.

Täglich fast kamen ihm neue Einfälle für Apparate und Verfahren, und selbst Webers experimentelles Geschick reichte nicht aus, bei der praktischen Verwirklichung mit solcher sprudelnden Fülle der Gedanken Schritt zu halten. Das Unifilar- und Bifilarmagnetometer mit Spiegelablesung wurden geschaffen, die Gaußschen Methoden zur Bestimmung der Horizontalintensität aus Schwingungsbeobachtungen und zur Bestimmung des magnetischen Moments durch Ablenkung einer Hilfsnadel wurden entwickelt. Bald schon konnte Gauß an seine Freunde berichten, daß „die Messungen, die sich auf die absolute Deklination, die Intensität und die täglichen und stündlichen Variationen von beiden beziehen, eine Genauigkeit erhalten (hätten), die der der astronomischen Beobachtungen fast gleich komme" (an Encke, den 12. Mai 1832) und in ihnen versichern, daß es „nichts interessanteres von praktischen Geschäften (gebe) als diese magnetischen Beobachtungen" (Brief an Schumacher vom 31. August 1832).

Den Rechenschaftsbericht über alle diese Untersuchungen legten Gauß und Weber in einem von ihnen gemeinsam herausgegebenen Jahrbuch vor, den „Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins", von dem insgesamt sechs Bände erschienen, die außer der Mitteilung der Beobachtungswerte für die Jahre 1836—1841 noch 55 Abhandlungen enthielten, 15 davon von Gauß und 23 von Weber. Gleichsam als eine Art Kompendium der hier zu behandelnden Fragen ging diesen Jahrbüchern eine 1832 veröffentlichte Abhandlung von Gauß voran, die sich „Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata" betitelte (Intensität der erdmagnetischen Kraft auf absolutes Maß zurückgeführt).

Unter Zugrundelegung der für die Betrachtung bequemen Hypothese zweier imponderabler magnetischer Fluida wird zunächst einmal die „Einheit der Menge von nordmagnetischer Flüssigkeit (definiert als) diejenige, deren abstoßende Kraft auf eine andere, ihr gleiche und in der Einheit der Entfernung befindliche Menge = 1 ist, d.h. (gleich) der Wirkung einer beschleunigenden Kraft = 1 auf eine Masse = 1". Nach dieser Festsetzung eines „absoluten" Maßsystems mit den Grundmaßeinheiten des Millimeters, Milligramms und der Sekunde legt Gauß den Begriff des magnetischen Momentes fest und führt danach mit Hilfe potentialtheoretischer Sätze die unkontrollierbare Verteilung des Magnetismus im Innern des magnetischen Körpers auf eine bezüglich der Wirkung nach außen gleichwertige Verteilung auf der Oberfläche zurück. Am Schluß der Arbeit weist er darauf hin, daß eine ebenso genaue Bestimmung der Werte, wie sie bei der Horizontalintensität des Erdmagnetismus vorgenommen werden kann, für Inklination und Totalintensität nicht möglich ist, und daß es hier noch einer Verfeinerung der Verfahren zur Bestimmung dieser Elemente bedarf. Die Benutzung der Fluidentheorie, so betont er im letzten Paragraphen der Abhandlung, bedeute übrigens keineswegs eine Ablehnung der Ampereschen Deutung des Magnetismus als einer Summationswirkung von Molekularströmen. Er beabsichtige, diese in mehrfacher Hinsicht empfehlenswerte Anschauung „weder zu bekräftigen noch zurückzuweisen. ... Welche Auffassung aber auch künftig für die magnetischen und elektromagnetischen Erscheinungen angenommen wird, bezüglich der ersteren muß sie überall zu demselben Ergebnis wie die gewöhnliche Theorie führen, und was auf Grund dieser ... (hier entwickelt wurde), wird nur in der Form, nicht aber im Wesen verändert werden können."

Den Gedanken, auch die „Grundgesetze der galvanischen Ströme und der Induktion ... auf absolute Maße“ zurückzuführen, hat Gauß in einem Briefe an Encke (vom Januar 1836) zehn Jahre früher ausgesprochen, als Weber ihn dann praktisch verwirklichte. Bei dem Nachdenken über diese Grundgesetze gelangte er dabei zu ganz entsprechenden Formulierungen, wie sie später als die Elementargesetze von Graßmann und Carl Neumann bekannt wurden. Er hat, wie er am 19. März 1845 an Weber schrieb, nichts darüber veröffentlicht, weil ihm gerade das noch fehlte, was er als „den eigentlichen Schlußstein betrachtete, ... nämlich die Ableitung der Zusatzkräfte, die zu der gegenseitigen Wirkung ruhender Elektrizitätsteile noch hinzukommen, wenn sie in gegenseitiger Bewegung sind, aus der nicht instantanen, sondern auf ähnliche Weise wie beim Licht in der Zeit sich fortpflanzenden Wirkung“.

Unter den in den „Resultaten“ abgedruckten von Gauß sind zwei besonders hervorzuheben. Im dritten Band des Jahrbuches erschien 1839 die „Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus“ als eine rein phänomenologische Theorie der Erscheinungen, die die Beobachtungsergebnisse durch eine Entwicklung des magnetischen Potentials der Erde nach Kugelfunktionen darstellte. Gauß berechnet dort unter anderem auch das magnetische Moment der Erde und findet es zu $8{,}54 \cdot 10^{25}$ absoluten Einheiten, mit einer Abweichung von nur etwa 2% gegenüber dem Werte aus neueren Bestimmungen. Der folgende, vierte Band der „Resultate“ brachte dann eine Einführung in die Potentialtheorie als „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernungen wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte“. Der Ausdruck „Potential“, der bereits bei Daniel Bernoulli vorkommt, wurde erst durch Gauß in der Physik eingeführt, der in seinem 1840 erschienenen „Atlas des Erdmagnetismus“ das Potential auch als „mögliche Arbeit“ kennzeichnete. Die von ihm entwickelten Lehrsätze stimmen weitgehend mit denen überein, die sich bereits in dem 1828 in Nottingham veröffentlichten „Essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism“ von George Green finden. Gauß kannte diese Arbeit nicht, auf die erst einige Jahre später William Thomson (Lord Kelvin) hinwies.

In engstem Zusammenhange mit den erdmagnetischen Untersuchungen und insbesondere mit der Konstruktion des Bifilarmagnetometers, das von Gauß erdacht und von Weber ausgeführt wurde, steht die am allgemeinsten bekannte Erfindung dieser beiden Männer, die Erfindung der elektromagnetischen Telegraphie. Sie ergab sich anläßlich von Versuchen zur Prüfung des Ohmschen und einiger daraus folgenden Verzweigungsgesetze, die Gauß im März 1833 fand und die später unter dem Namen der Kirchhoffschen Gesetze bekannt wurden. Über die Erfindung des Telegraphen, deren Wert er durchaus erkannte, berichtete Gauß am 13. Juni 1833 an Alexander von Humboldt: „In der allerletzten Zeit sind wir beschäftigt mit galvanomagnetischen Versuchen in großem Maßstabe. Eine Drahtverbindung zwischen der Sternwarte und dem Physikalischen Kabinett ist eingerichtet. ... Unser Weber hat das Verdienst, diese Drähte gezogen zu haben ... ganz allein. ... Fast unzählige Male sind die Drähte, wenn sie schon ganz oder zum Teil fertig waren, wieder zerrissen.... Endlich ist seit einigen Tagen die Verbindung, wie es scheint, sicher hergestellt; statt des früheren Kupferdrahtes ist etwas starker Eisendraht — gefirnißt — angewandt. Die Wirkung ist sehr imponierend, ja sie ist jetzt zu stark für meine eigentlichen Zwecke. Ich wünsche nämlich zu versuchen, sie zu telegraphischen Zeichen zu gebrauchen. ... Es leidet keinen Zweifel, daß es gehen wird. ... Wäre nur zu den Kosten Rat zu schaffen, so meine ich, würde man unmittelbar von Göttingen nach Hannover korrespondieren können."

Ohne Zweifel stellen die hier ausführlicher besprochenen Arbeiten die wichtigsten unter Gauß' physikalischen Untersuchungen dar. Die einzigen sind sie keineswegs. Bereits 1803 hatte er einem Schreiben an Johann Friedrich Benzenberg eine kleine Abhandlung „Über die Fundamentalgleichungen für die Bewegung schwerer Körper auf der rotierenden Erde" beigelegt, die dieser in seinem 1804 erschienenen „Versuch über die Umdrehung der Erde" abdruckte. Die „Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii" (Allgemeine Grundlagen einer Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten im Gleichgewichtszustande) vervollständigten die Laplacesche Theorie der Kapillarwirkung unter anderm durch den Beweis des Satzes, daß jeder Flüssigkeit das Bestreben innewohnt, einen möglichst tiefen Platz und zugleich eine möglichst kleine Oberfläche einzunehmen. Sie kamen im selben Jahre 1829 heraus wie der Aufsatz „Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik". Betreffs dieses „Prinzips des kleinsten Zwanges", das eines der weitestumfassenden der ganzen Mechanik ist, sagt Gauß in einem Briefe an Olbers (vom 31. Januar 1829), daß es zwar an und für sich nicht mehr und nichts anderes auszudrücken vermöge, als was im Prinzip der virtuellen Bewegungen (oder nach einer Äußerung zu Möbius: der fakultativen Bewegungen) und im d'Alembertschen Prinzip auch schon enthalten sei. Dadurch werde aber keineswegs jedes neue Grundprinzip wertlos. „Ich finde nun", so fährt er dann fort, „daß alles sich in ein höchst einfaches Gesetz zusammenfassen läßt, oder wenn sie lieber wollen in zwei, indem ich ein triviales vorausschicke: 1. Die Bewegung eines freien materiellen Punktes in jedem unendlich kleinen Zeitteilchen ist aus den einzelnen Bewegungen, die er teils infolge der Trägheit, ... teils infolge der einzelnen auf ihn einwirkenden Kräfte haben wird, zusammengesetzt. 2. Wenn die Bewegung eines Systems von materiellen Punkten nicht frei, sondern durch gegenseitige Relationen oder durch äußere Hindernisse beschränkt ist, so liegen die Plätze, wo sie nach einem unendlich kleinen Zeitteilchen wirklich sich befinden, denen, wo sie (sich) infolge einer freien Bewegung befinden müßten, so nahe wie möglich."

Während im Zusammenhange mit seinen erdmagnetischen Untersuchungen Gauß geradezu zwangsläufig zur Beschäftigung mit dem Problem der gedämpften und ungedämpften Schwingungen geführt wurde — der Ausdruck „logarithmisches Dekrement" rührt von ihm her, — gab die Teilnahme an den Arbeiten zur Darstellung der Hannoverschen Normalmaße den Anstoß zur Verbesserung der Wägungsverfahren und zur Berichtigung der Schneidenaufhängung bei der Waage. Auf Gauß geht nicht nur die Bestimmung der Nullstellung einer Waage aus Schwingungsbeobachtungen zurück, sondern auch die Methode der Doppelwägungen unter Vertauschung von Last und Gewicht.

Daß Gauß als beobachtender Astronom und Geodät an optischen Fragen nicht vorübergehen konnte, leuchtet ein. In einem 1817 veröffentlichten Aufsatz „Über die achromatischen Doppelobjektive, besonders in Rücksicht der vollkommneren Aufhebung der Farbenzertreuung" wich er von der bis dahin üblichen Formgebung der Linsen ab. Er machte bei jeder der beiden Linsen eines Achromaten den einen Halbmesser positiv, den andern negativ und zwar so, daß die Kronglaslinse sammelnd, die Flintglaslinse zerstreuend wirkte. Solche Gaußschen Objektive sind später von Steinheil (1860) ausgeführt worden und haben sich auch für Mikroskopobjektive bewährt. Lummer hat sie als bestgeeignet für Präzisionsspektrometer vorgeschlagen. Was die 1840 erschienenen „Dioptrischen Untersuchungen" anbetrifft, so bilden sie nach dem Urteil von Clemens Schaefer den Abschluß und die Vollendung der geometrischen Linsenoptik enger Strahlenbündel. Durch die Einführung der neuen Begriffe von „Hauptebenen" und „Hauptpunkten" gelang es Gauß, das ganze System brechender Kugelflächen durch eine einzige brechende Kugelfläche von bestimmter Krümmung zu ersetzen, wenn die Strahlen aus einem Mittel von der Brechzahl n eintreten und in ein solches von der Brechzahl n' als letztes austreten, vorausgesetzt, daß n ungleich n' ist. Ist dagegen n gleich n', so wird eine Linse von endlicher Dicke oder ein ganzes Linsensystem gleichwertig durch eine unendlich dünne Linse von gegebener Brennweite vertreten.

Als diese Arbeit erschien, war Weber bereits seiner Stellung als Professor verlustig gegangen. Es war nämlich 1837 in Göttingen zu einem Protest der Professorenschaft gegen den Verfassungsbruch gekommen, den Herzog Ernst August begangen hatte, und zu den Protestierenden gehörte auch Wilhelm Weber. Er wurde zwar nicht, wie einige andere, des Landes verwiesen, und konnte sich als Privatmann weiterhin an den erdmagnetischen Untersuchungen und an der Herausgabe der „Resultate" beteiligen. Trotzdem wurde seine Lage von Tag zu Tag unhaltbarer, und so entschloß er sich 1843, einer Berufung nach Leipzig zu folgen. Gauß empfand seinen Fortgang als einen „schmerzlichen, nie zu überwindenden Verlust" und verlor die Freude an der Fortsetzung der physikalischen Arbeiten. Er wandte sich wieder der Beschäftigung mit mathematischen Dingen zu — die schon erwähnten „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie" legen dafür Zeugnis ab — und übernahm auch die Aufgabe einer Reorganisation der Universitäts-Witwenkasse.

Am 16. Juli 1849 wurde in der Aula der Gesellschaft der Wissenschaften Gauß' goldenes Doktorjubiläum gefeiert. Bei diesem festlichen Anlaß legte der Jubilar eine letzte Denkschrift vor, „Beiträge zur Theorie der Gleichungen", in deren ersten Teil er einen weiteren Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra erbrachte. Er knüpfte an die Beweisführung in seiner Inauguraldissertation von 1799 an, in der er jedoch einer Einführung des Imaginären noch mit voller Absicht ausgewichen war. Dazu bestand jetzt keine Notwendigkeit mehr, wo dank seiner eigenen Bemühungen die komplexen Größen Bürgerrecht in der Mathematik erworben hatten. Gauß hielt es deshalb für angemessen, unter Verzicht auf die ursprüngliche Formulierung den Satz so auszusprechen, „daß jene Funktion (zur Wurzelbestimmung) sich in n einfache Faktoren zerlegen lasse, wo dann die konstanten Teile dieser Faktoren nicht eben reelle Größen zu sein brauchen, sondern für dieselben auch komplexe Werte zulässig sein müssen. Bei dieser Einkleidung gewinnt der Satz selbst noch an Allgemeinheit, weil dann die Beschränkung auf reelle Werte auch bei den Koeffizienten ... nicht vorausgesetzt zu werden braucht, vielmehr jedwede Werte für dieselben zulässig bleiben".

Veröffentlicht hat Gauß von da ab nichts mehr. Er blieb mit seinen noch lebenden Schülern und Freunden weiterhin in lebhaftem Briefwechsel und an allen wissenschaftlichen Fragen lebhaft interessiert. Ihn selbst beschäftigten vorwiegend Untersuchungen über die Konvergenz der Reihen, er wandte aber beispielsweise auch dem Foucaultschen Pendelversuch seine Aufmerksamkeit zu und ließ ihn in verbesserter Form wiederholen. Selbst an seinen Vorlesungen schien er mehr Freude als früher zu haben. Wie es dabei in dem kleinen Auditorium zuging, in dem an den Längsseiten eines Tisches die wenigen Hörer recht gedrängt saßen, während Gauß am oberen Ende in einiger Entfernung vom Tische Platz nahm, wissen wir durch eine höchst lebendige Schilderung Dedekinds.

„Gauß trug ein leichtes schwarzes Käppchen, einen ziemlich langen braunen Gehrock, graue Beinkleider. Er saß meist in bequemer Haltung, etwas gebeugt vor sich niedersehend, mit über dem Leib gefalteten Händen. Er sprach ganz frei, sehr deutlich, einfach und schlicht. Wenn er aber einen neuen Gesichtspunkt hervorheben wollte, wobei er ein besonders charakteristisches Wort gebrauchte, so erhob er wohl plötzlich den Kopf, wandte sich zu seinem Nachbarn und blickte ihn während der nachdrücklichen Rede ernst mit seinen schönen, durchdringenden blauen Augen an. Das war unvergeßlich. Seine Sprache war fast ganz dialektfrei, nur bisweilen kamen Anklänge an unsere stadtbraunschweigische Mundart, beim Zählen zum Beispiel, wobei er auch den Gebrauch der Finger nicht verschmähte, sagte er nicht eins, zwei, drei, sondern eine, zweie, drei usf., wie man es noch jetzt bei uns auf dem Markte hören kann. Ging er von einer prinzipiellen Erörterung zur Entwicklung mathematischer Formeln über, so erhob er sich, und in stattlicher, ganz aufrechter Haltung schrieb er an einer neben ihm stehenden Tafel mit der ihm eigenen schönen Handschrift, wobei es ihm immer durch Sparsamkeit und zweckmäßige Anordnung gelang, mit dem ziemlich kleinem Raume auszukommen. Für die Zahlenbeispiele, auf deren sorgfältige Durchführung er besonderen Wert legte, brachte er die erforderlichen Data auf kleinen Zetteln mit."

Seit 1851 machten sich die Altersbeschwerden bei Gauß stärker bemerkbar. Er begann an Schlaflosigkeit zu leiden und ein Herzleiden stellte sich ein. Allmählich wurden die Symptome bedenklich. Dennoch erlosch seine Teilnahme am Fortschritt der mathematischen Wissenschaften nicht, und als Bernhard Riemann die Vorschläge für seine Probevorlesung einreichte, wählte er unter den Themen das dritte aus „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen". Am Freitag nach Pfingsten fand das Kolloquium statt und auf dem Heimwege von der anschließenden Fakultätssitzung war Gauß voll des Lobes für das, was ein so junger Mann über einen so schwierigen Gegenstand vorzutragen gewußt hatte. Von da an verschlechterte sich sein Befinden zusehends. Seit Herbst 1854 mußte man mit seinem Ableben rechnen. Am 23. Februar des folgenden Jahre, morgens um 1 Uhr, tat Gauß den letzten Atemzug. Während der langen, an Arbeit und an Erfolgen reichen Dauer seines Lebens hatte er in drei Wissenschaften, der Astronomie, der Geodäsie und der Physik der Forschung neue Wege gewiesen. Auf seinem ureigensten Forschungsgebiet, dem der Mathematik, bestimmte er den Gang ihrer Entwicklung für fast ein volles Jahrhundert.

Tafel I

Vorder- und Rückseite der Gauß-Medaille
modelliert von Prof. Kurt Edzard (Braunschweig)